ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

იოსებ ფოჩხუა

სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადი- ფერენცირებული მწკრივების შეჯამებადობა და სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები

01.01.01 _ მათემატიკური ანალიზი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი სერგო თოფურია ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, დოცენტი ნოდარ მაჭარაშვილი

თბილისი _ 2006

შინაარსი

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია ევკლიდეს k≥3 განზო-მილებიანი სივრცის S^{k-1} ჰიპერსფეროზე განსაზღვრული ფუნქციის ვალე_პუსენის ინტეგრალის თვისებები, ვალე-პუსენის გადიფერენ-ცირებული ინტეგრალის თვისებები და განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრი-ვის შეჯამებადობა აბელის მეთოდით.

ნაშრომი შედგება შესავალისა და ორი თავისაგან. P პირველი თავი შედგება სამი პარაგრაფისაგან. §1.1-ში მოყვანი-ლია ის განსაზღვრებები და აღნიშვნები, რომლებიც გამოყენებუ-ლია პირველ თავში .

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1 . 1 . 1 . ვთქვათ $f \in L(S^2)$. ინტეგრალს

$$V_n(f;x) = \frac{n+1}{4\pi}\int_{S^2}\left[\frac{1+(x,y)}{2}\right]^n f(y)dS^2(y)$$ ეწოდება

ვალე_პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1 . 1 . 2 . ვთქვათ, $f \in L(S^{k-1})$. $P \in S^{k-1}$ წერტილს ეწოდება $f(P)$ ფუნქციის D წერტილი, თუ

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{k-1}}\int_{D^{k-1}(P,h)}\left[f(Q)-f(P)\right]dS(Q)=0.$$

$f(P)\in C(S^{k-1})$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

.

$$\omega(f,\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\| f(P)-\frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|}\int_{C_h^{k-2}(P)}f(Q)dS(Q)\|_{C(S^{k-1})}=$$

$$=\sup_{0<h\le\delta}\max_{P\in S^{k-1}}\left|f(P)-\frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|}\int_{C_h^{k-2}(P)}f(Q)dS(Q)\right|.$$

$f(P)\in C(S^{k-1})$ ფუნქციის სიგლუვის მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\omega^*(f,\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\| f(P)-\frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|}\int_{D^{k-1}(P,h)}f(Q)dS(Q)\|_{C(S^{k-1})}.=$$

$$=\sup_{0<h\le\delta}\max_{P\in S^{k-1}}\left|f(P)-\frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|}\int_{D^{k-1}(P,h)}f(Q)dS^{k-1}(Q)\right|.$$

$L_p(S^{k-1})$ ($1\le p\le\infty$) სივრცის φ ფუნქციის უწყვეტობის იტეგრალუ-რი მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\omega(f,\delta)_{L_p(S^{k-1})}=\sup_{0<h\le\delta}\| f(P)-\frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|}\int_{C^{k-2}(P,h)}f(Q)dS(Q)\|_{L_p(S^{k-1})}=$$

$$=\sup_{0<h\le\delta}\left\{\int_{S^{k-1}}\left|f(P)-\frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|}\int_{C^{k-2}(P,h)}f(Q)dS(Q)\right|^p dS(P)\right\}^{1/p},$$

ინტეგრალური სიგლუვის მოდული კი ფორმულით:

$$\omega^*(f,\delta)_{L_p(S^{k-1})}=\sup_{0<h\le\delta}\| f(P)-\frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|}\int_{D^{k-1}(P,h)}f(Q)dS(Q)\|_{L_p(S^{k-1})}=$$

$$=\sup_{0<h\le\delta}\left\{\int_{S^{k-1}}\left|f(P)-\frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|}\int_{D^{k-1}(P,h)}f(Q)dS(Q)\right|^p dS(P)\right\}^{1/p}.$$

შესაბამისად განვსაზღვროთ განზოგადოებული უწყვეტობის და სიგლუვის მოდულები, უწყვეტობის ინტეგრალური და ინტეგრა-ლური სიგლუვის მოდულები:

$$\Omega(f;\delta)=\sup_{c\geq 0}\frac{\omega(f;c\delta)}{(1+c)^2}; \qquad \Omega^*(f;\delta)=\sup_{c\geq 0}\frac{\omega^*(f;c\delta)}{(1+c)^2};$$

$$\Omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}=\sup_{c\geq 0}\frac{\omega(f;c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2};\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}=\sup_{c\geq 0}\frac{\omega^*(f;c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}. \qquad (1.1.6.)$$

განსაზღვრება 1.1.3. თუ

$$\Omega(f;\delta)\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} \qquad (0<\alpha\leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f;\delta)\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha}\right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოე-ბულ) პირობას C მეტრიკაში და ვწერთ $f\in \mathrm{Lip}\alpha$, $(f\in \mathrm{Lip}^*\alpha)$.

განსაზღვრება 1.1.4. თუ

$$\Omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} \qquad (0<\alpha\leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha}\right),$$

მაშინ ვიტყვით , რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგა-დოებულ) პირობას L_p მეტრიკაში და ვწერთ $f\in \mathrm{Lip}(\alpha;p)$ $(f\in \mathrm{Lip}^*(\alpha;p))$.

f ფუნქციის $x\in S^{k-1}$ წერტილზე ლაპლასის განზოგადოებული $\overline{\Delta}f(x)$ ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\overline{\Delta}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\left|C^{k-2}(x;h)\right|}\int\limits_{C^{k-2}(x;h)}f(y)dS^{k-2}(y)-f(x)}{\frac{2}{k-1}\sin^2\frac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე რიგის $\overline{\Delta}^2 f(x)$ ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობი-დან:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\left|C^{k-2}\right|\sin^{k-2}h}\int\limits_{C^{k-2}(x;h)} f(y)dS^{k-2}(y)=f(x)+\left(\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right)}+\frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+2\right)}\sin^2\frac{h}{2}\right)\cdot\sin^2\frac{h}{2}\overline{\Delta}f(x)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+2\right)}\sin^4\frac{h}{2}\overline{\Delta}^2 f(x)+o(1-\cosh)^2.$$

f ფუნქციის ლაპლასის უფრო განზოგადოებული $\widetilde{\Delta}f(x)$ ოპერა-ტორი $x\in S^{k-1}$ წერტილზე განისაზღვრება ტოლობით:

$$\widetilde{\Delta}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\left|D^{k-2}(x;h)\right|}\int\limits_{D^{k-2}(x;h)} f(y)dS^{k-1}(y)-f(x)}{\frac{2}{k+1}\sin^2\frac{h}{2}},$$ ხოლო

მეორე რიგის უფრო განზოგადოებული ოპერატორი $\widetilde{\Delta}^2 f(x)$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\frac{1}{\left|D^{k-1}(x;h)\right|}\int\limits_{D^{k-1}(x;h)} f(y)dS^{k-1}(y)=f(x)+\left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}+\frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)}\sin^2\frac{h}{2}\right)\sin^2\frac{h}{2}\widetilde{\Delta}f(x)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)}\sin^4\frac{h}{2}\widetilde{\Delta}^2 f(x)+o(1-\cosh)^2.$$

§1.2-ში შესწავლილია S^{k-1} სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები.

განსაზღვრება 1.2.1. ვთქვათ $f\in L(S^{k-1})$. ინტეგრალს

$$V_n(f,P)=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int\limits_{S^{k-1}}\left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n f(Q)dS(Q). \qquad (1.2.1)$$

ეწოდება ვალე_პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

დამტკიცებულია ამ ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება, კერძოდ დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.2.1. თუ $f(P)\in L(S^{k-1})$, მაშინ ამ ფუნქციის ყველა D წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} V_n(f,P)=f(P).$$

თეორემა 1.2.2. თუ f(P)$\in$C(S^{k-1}), მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C\left(S^{K-1}\right)} \le C_k\Omega^*\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

შედეგი. თუ $f \in \mathrm{Lip}^*\alpha$, მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C\left(S^{k-1}\right)} \le \frac{C_k A}{\sqrt{n^\alpha}}. \qquad (1.2.6)$$

თეორემა 1.2.3. თუ $f \in Lp\left(S^{k-1}\right)$, მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{L_p\left(S^{k-1}\right)} \le B_k\Omega^*\left(f;\frac{i}{\sqrt{n}}\right)_{Lp\left(S^{k-1}\right)}.$$

შედეგი. თუ $f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha;p)$, მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{L_p\left(S^{k-1}\right)} \le \frac{B_k A}{\sqrt{n^\alpha}}. \qquad (1.2.9)$$

თეორემა 1.2.4. (1.2.6) და (1.2.9) შეფასებები (რიგის თვალსაზ-რისით) საბოლოოა.

თეორემა 1.2.5. ვთქვათ $f(P)\in C(S^{k-1})$. თუ რაიმე P წერტილზე არსებობს ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი $\overline{\Delta}f(P)$, მაშინ

$$V_n(f,P)=f(P)+\frac{\overline{\Delta}f(P)}{n}+\frac{\rho_n}{n},$$ სადაც

$\rho_n \to 0$, როცა $n\to\infty$.

თეორემა 1.2.5 გვიჩვენებს, რომ ვალე_პუსენის ინტეგრალი მიუხედავად მისი ზოგადობისა (ის თანაბრად უახლოვდება ნების-მიერ უწყვეტ ფუნქციას), გვაძლევს შედარებით ცუდი სიზუსტის მიახლოებას. უფრო მეტიც, f ფუნქციის სტრუქტურული თვისებების ნებისმიერი სახის გაუმჯობესება არ გვაძლევს $\frac{1}{n}$–ზე უკეთესი რი-გის მიახლოებას.

§1.3-ში დამტკიცებულია თეორემები ვალე-პუსენის გადიფერენ-ცირებული ინტეგრალის კრებადობის შესახებ. კერძოდ:

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ f $\in$L(S^{k-1}). თუ $x\in S^{k-1}$ წერტილზე არსებობს $\widetilde{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} D_k^2 V_n(f;x)=\widetilde{\Delta}^2 f(x).$$

თეორემა 1.3.6. თუ $\overline{\Delta}^2 f(x) \in C\left(S^{k-1}\right)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} D_k^2 V_n\left(f;x\right) = \widetilde{\Delta}^2 f(x)$$

თანაბრად x_ის მიმართ S^{k-1}.

მეორე თავი შედგება ორი პარაგრაფისაგან. §2.1-ში მოყვანილია ის განსაზღვრებები და აღნიშვნები, რომლებიც გამოყენებულია ამ თავში.

დაუშვათ, ერთეულოვან ორგანზომილებიან S^2 სფეროზე მოცე-მულია ვექტორფუნქცია $v(\theta;\varphi)$. განვსაზღვროთ ამ ფუნქციის კომპონენტების კომბინაცია [17]

$$v_0=v_r,\ v_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi+iv_\theta),\ v_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi-iv_\theta)$$

და დავშალოთ ისინი განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სის-ტემის მიმართ

$$v_m(\theta,\varphi) \sim \sum_{l=|m|}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} c_{mn}^l T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0\right) \qquad (m=0,\pm 1), \tag{2.1.1}$$

სადაც

$$T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0\right) = e^{-in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} P_{mn}^l(\cos\theta)$$ განზოგადოებული

სფერული ფუნქციებია,

$$P_{mn}^l(\mu) = \frac{(-1)^{n-m} i^{n-m}}{2^l (l-m)!}\sqrt{\frac{(l-m)!(l+n)!}{(l+m)!(l-n)!}}(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}[(1-\mu)^{l-m}(1+\mu)^{l+m}],$$

ხოლო

$$C_{mn}^l = \frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_m(\theta',\varphi')\overline{T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi',\theta',0\right)}\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

ფურიეს კოეფიციენტებია.

განვიხილოთ (3.1.1) მწკრივის აბელის საშუალოები

$$u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = \sum_{l=|m|}^{\infty}\rho^l \sum_{n=-l}^{l} C_{mn}^l T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_m(\theta',\varphi')Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi',$$

სადაც

$$Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi') = \sum_{l=|m|}^{\infty}(2l+1)\rho^l \sum_{n=-l}^{l} T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0\right)\overline{T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi',\theta',0\right)}. \tag{2.1.3}$$

განსაზღვრება 2.1.1. (2.1.1) მწკრივს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A მეთოდით შეჯამებადს (1, θ_0, φ_0) წერტილში, თუ

$$\lim_{\rho\to 1-} u(v_{m;}\rho,\theta_0,\varphi_0)=S\,.$$

განსაზღვრება 2.1.2. (2.1.1) მწკრივს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A* მეთოდით შეჯამებადს (1, θ_0 ,φ_0) წერტილში, თუ

$$\lim_{(\rho,\theta,\varphi)\overset{\wedge}{\to}(,\theta_0,\varphi_0)} u(v_{m;}\rho,\theta,\varphi)=S\,,$$

სადაც $(\rho,\theta,\varphi)\overset{\wedge}{\to}(1,\theta_0,\varphi_0)$ სიმბოლო ნიშნავს, რომ (ρ,θ,φ) წერტილი მიისწრაფის (1, θ_0, φ_0) წერტილისკენ სფეროს არამხები მიმართუ- ლებით .

განსაზღვრება 2.1.3. თუ არსებობს რიცხვები a_0, a_1, ...,a_r ისეთი , რომ x წერტილის რაიმე მიდამოში სრულდება ტოლობა

$$\frac{1}{|C(x;h)|}\int_{C(x;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{a_\nu}{(\nu!)^2 2^\nu}(1-\cosh)^\nu+o(1-\cosh)^r,\quad r=1,2,. \qquad (2.1.4)$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f(x) ფუნქციას x წერტილში გააჩნია ლაპლას-ის r რიგის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta^r} f(x)$ სიმბოლოთი.

(2.1.3) ტოლობით განსაზღვრული ლაპლასის განზოგადოებუ- ლი ოპერატორი a_ν რიცხვებთან დაკავშირებულია ტოლობებით

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\Delta^0} f(x)=a_0,\\ \overline{\Delta}[\overline{\Delta}+1\cdot 2]\{\overline{\Delta}+2\cdot 3]\cdots[\overline{\Delta}+(\nu-1)\nu]f(x)+a_\nu,\\ \nu=1,2,...,r,\end{array}\right\} \qquad (2.1.5)$$

სადაც $\overline{\Delta}^i\cdot\overline{\Delta}^\gamma=\overline{\Delta}^{i+\gamma}$, i,γ≥0, i+γ≤r.

განსაზღვრება 2.1.4. ვიტყვით რომ $x\in S^2$ წერტილის მიდამოში ინტეგრებად f(x) ფუნქციას ამ წერტილში გააჩნია ლაპლასის r რიგის განზოგადოებული ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$, თუ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\frac{1}{|D(x;h)|}\int_{D(x;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{b_\nu}{\nu!(\nu+1)!2^\nu}(1-\cosh)^\nu+0(1-\cosh)^r,\quad \nu=\overline{1,r}.$$

ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$ დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.5. ვთქვათ $f(x)$ ინტეგრებადია $x_0\in S^2$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $a_0(x)$, $a_1(x)$, ...,$a_{r-1}(x)$ და რიცხვი a_r ისეთი , რომ $\lim\limits_{x\to x_0} a_\gamma(x)=a_\gamma$ და

$$\frac{1}{|C(x_0;h)|}\int\limits_{C(x_0;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{a_\nu(x)}{(\nu!)^2 2^\nu}(1-\cos h)^\nu+\frac{a_\nu}{(r!)^2 2r}(1-\cos h)^r+\varepsilon(x,h)(1-\cos h)^r,$$

სადაც $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x\to x_0}}\varepsilon(x,h)=0$, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილ- ში გააჩნია

ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი ძლიერი აზ- რით და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta}_x^r f(x_0)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ თუ x=x_0, მაშინ $\overline{\Delta}_x^r f(x_0)=\overline{\Delta}^r f(x_0)$.

ოპერატორი $\overline{\Delta}_x^r$ დაკავშირებულია a_ν (ν=1, 2,..., r) რიცხვებთან (2.1.5.) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.6. ვთქვათ, $f(x)$ ინტეგრებადია $x_0\in S^2$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $b_\gamma(x)$, γ=0,1,...,r-1 და რიცხვი b_r ისეთი, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} b_\gamma(x)=b_\gamma$ და

$$\frac{1}{|D(x_0;h)|}\int\limits_{D(x_0;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{b_\nu(x)}{\nu!(\nu+1)!2^\nu}(1-\cos h)^\nu+\frac{b_r}{r!(r+1)!2^r}(1-\cos h)^r+\varepsilon(x,h)(1-\cos h)^r,$$

სადაც $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x\to x_0}}\varepsilon(x,h)=0$, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია

ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშ-ნავთ $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0)$ სიმბოლოთი.

ამასთან, თუ x=x_0 მაშინ, $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0)=\tilde{\Delta}^r f(x_0)$. ოპერატორი $\tilde{\Delta}^\nu f(x)$, ν=0,1,...,r, დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობე-ბით.

§2.2.-ში შესწავლილია განზოგადოებულ სფერულ ფუქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივის აბელის მეთოდით შეჯამებადობა. კერძოდ დამტკიცებულია:

თეორემა 2.2.1. $Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')$ ფუნქცია ჰარმონიულია ანუ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')=0. \qquad (2.2.1)$$

თეორემა 2.2.3. ვთქვათ $v(\theta;\varphi)\in L(S^2)$. თუ $r\in N$_სთვის არსე- ბობს $\overset{\sim}{\Delta}^{r} v_{\nu}(\theta,\varphi)$, მაშინ

$$\lim_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi)=\overset{\sim}{\Delta}^{r} v_{\nu}(\theta,\varphi).$$

თეორემა 2.2.5. ვთქვათ $v(\theta,\varphi)\in L(S^2)$ და $r\in N$. თუ (θ_0,φ_0) წერტილზე არსებობს $\overset{\sim}{\Delta}^{r}_{(\theta,\varphi)} v_m(\theta_0,\varphi_0)$, მაშინ

$$\lim_{(\rho,\theta,\varphi)\xrightarrow{\wedge}(1,\theta_0,\varphi_0)} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi)=\overset{\sim}{\Delta}^{r}_{(\theta,\varphi)} v_m(\theta_0,\varphi_0).$$

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია [14], [23] და [24] შრომებში.

I-თავი

ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები

§1.1. განსაზღვრებები და აღნიშვნები

ვთქვათ R^3 ევკლიდეს სამ გამზომილებიანი სივრცეა, რომლის წერტილებს აღვნიშნავთ $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$, და ა. შ. , x და y ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, x ვექტორის სიგრძე $|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}x_i^2}$.

ერთეულოვანი სფერო $\{x;\ x\in R^3, |x|=1\}$ აღვნიშნოთ S^2-ით. S^2-ზე ჯამებად ფუნქციათა სივრცე აღვნიშნოთ $L(S^2)$_ით, ხოლო S^2_ზე უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $C(S^2)$_ით.

x წერტილის x_1 ,x_2, x_3 კოორდინატები სფერულ ρ, θ, φ კოორდი-ნატებთან დაკავშირებულია ტოლობებით:

$x_1=\rho\cos\theta,$

$x_2=\rho\sin\theta\cos\varphi,$

$x_3=\rho\sin\theta\sin\varphi,$

$0<\theta<\pi,\ \ \theta<\rho<2\pi.$

γ–თი აღვნიშნოთ კუთხე, კოორდინატთა სათავიდან $x=(\theta, \varphi)\in S^2$ და $y=(\theta', \varphi')\in S^2$ წერტილებამდე გატარებულ რადიუსებს შორის.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$(x,y)=\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\cos\varphi\sin\theta'\cos\varphi'+\sin\theta\sin\varphi\sin\theta'\sin\varphi'. \qquad (1.1.1)$$

თუ $\theta=0$, ე.ი. x ემთხვევა ჩრდილოეთ პოლუსს, მაშინ (1.1.1)_დან ვღებულობთ $\cos\gamma=\cos\theta'$, Aამიტომ $\gamma=\theta'$.

განსაზღვრება 1.1.1. ვთქვათ $f \in L(S^2)$. ინტეგრალს

$$V_n(f;x)=\frac{n+1}{4\pi}\int_{S^2}\left[\frac{1+(x,y)}{2}\right]^n f(y)dS^2(y) \qquad (1.1.2)$$

ეწოდება ვალე_პუსენის სინგულარული ინტეგრალი R^3_ში.

ცნობილია, რომ [5]

$$\int_{S^2}\left[\frac{1+(x,y)}{2}\right]^n dS^2(y)=\frac{4\pi}{n+1}. \qquad (1.1.3)$$

D_3–ით აღვნიშნოთ ლაპლასის ოპერატორი S^2 სფეროზე ანუ R^3_ში ლაპლასის ოპერატორის კუთხური ნაწილი, რომელიც ჩაწე- რილია სფერულ კოორდინატებით [5]

$$D_3=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

f ფუნქციის $x\in S^2$ წერტილზე ლაპლასის განზოგადოებული $\overline{\Delta} f(x)$ ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\overline{\Delta}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\pi\sin h}\displaystyle\int_{C(x;h)} f(y)dS(y)-f(x)}{\sin^2\dfrac{h}{2}},$$

ხოლო ლაპლასის მეორე რიგის განზოგადოებული ოპერატორი $\overline{\Delta}^2 f(x)$-ტოლობით:

$$\overline{\Delta}^2 f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\pi\sin h}\displaystyle\int_{C(x;h)} f(y)dS(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\dfrac{h}{2}}{\dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{h}{2}}.$$

ახლა განვსაზღვროთ ლაპლასის უფრო განზოგადოებული $\tilde{\Delta}$ ოპერატორი:

$$\tilde{\Delta} f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{|D(x;h)|}\int\limits_{D(x;h)} f(y)dS^2(y)-f(x)}{\frac{1}{2}\sin^2\frac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე

რიგის ოპერატორი $\tilde{\Delta}^2$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\tilde{\Delta}^2 f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4\pi\sin^2\frac{h}{2}}\left\{\int\limits_{D(x;h)} f(y)dS^2(y)-f(x)-\tilde{\Delta}\left(\frac{1}{2}\sin^2\frac{h}{2}+\frac{1}{12}\sin^4\frac{h}{2}\right)\right\}dS(y)}{\frac{1}{24}\sin^4\frac{h}{2}}.$$

ვთქვათ R^k k $(k\geq 3)$ განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცეა. (x,y)_ით აღვნიშნოთ $x, y\in R^k$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

S^{k-1}_ით R^k_ში ერთეულოვანი სფეროს, რომლის ცენტრი ძევს კოორდინატთა სათავეში.

$C^{k-2}(x,h)=\{t : t\in S^{k-1}, (x,t)=\cos h, 0<h\leq\pi\}$,

$D^{k-1}(x,h)=\{t : t\in S^{k-1}, (x,t)>\cos h, 0<h\leq\pi\}$,

$C^{k-2}(x,h)$ და $D^{k-1}(x,h)$–ის შესაბამისად (k-2) და (k-1) განზომილე-ბიანი ფართობი აღვნიშნოთ $|C^{k-2}(x,h)|$ და $|D^{k-1}(x,h)|$_ით.

ცნობილია, რომ ([16] გვ. 52)

$$\left|C^{k-2}(x,h)\right|=\frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}\sin^{k-2}h}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)},$$

$$\left|D^{k-1}(x,h)\right|=\int_0^h\left|C^{k-2}(x,\gamma)\right|d\gamma=\frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^h\sin^{k-2}\gamma d\gamma.$$

S^{k-1} სფეროზე ლაპლასის ოპერატორი აღვნიშნოთ D_k_თი ანუ R^k_ში ლაპლასის ოპერატორის კუთხური ნაწილი, რომელიც ჩაწერილია სფერულ კოორდინატებით ([17] გვ. 54):

$$D_k = \frac{1}{\sin^{k-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{k-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^{k-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{k-3}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{k-3}\sin\theta_{k-2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_{k-2}}\left(\sin\theta_{k-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{k-2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{k-3}\sin^2\theta_{k-2}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

f ფუნქციისთვის ლაპლასის განზოგადოებული $\overline{\Delta}f(x)$ ოპერატორი $x \in S^{k-1}$ წერტილზე განისაზღვრება შემდაგნაირად:

$$\overline{\Delta}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\left|C^{k-2}(x;h)\right|}\int\limits_{C^{k-2}(x,h)} f(y)dS^{k-2}(y)-f(x)}{\frac{2}{k-1}\sin^2\frac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე რიგის $\overline{\Delta}^2 f(x)$ ოპერატორ განისაზღვრება ტოლობი-დან:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\left|S^{k-2}\right|\sin^{k-2}h}\int\limits_{C^{k-2}(x,h)} f(y)dS^{k-2}(y)=f(x)+\left(\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right)}+\frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+2\right)}\sin^2\frac{h}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\sin^2\frac{h}{2}\overline{\Delta}f(x)+\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+2\right)}\sin^4\frac{h}{2}\overline{\Delta}^2 f(x)+o(1-\cos h)^2.$$

f ფუნქციის $x \in S^{k-1}$ წერტილზე ლაპლასის უფრო განზოგადოე-ბული ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით

$$\widetilde{\Delta}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\left|D^{k-2}(x;h)\right|}\int\limits_{D^{k-2}(x;h)} f(y)dS^{k-1}(y)-f(x)}{\frac{2}{k+1}\sin^2\frac{h}{2}},$$ ხოლო

მეორე რიგის $\overset{\sim}{\Delta}{}^2$ ოპერატორი კი ტოლობით:

$$\frac{1}{\left|D^{k-1}(x;h)\right|}\int_{D^{k-1}(x;h)} f(y)dS^{k-1}(y)=f(x)+\left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}+\frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)}\sin^2\frac{h}{2}\right)\sin^2\frac{h}{2}\widetilde{\Delta}f(x)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)}\sin^4\frac{h}{2}\widetilde{\Delta}^2 f(x)+o(1-\cosh)^2.$$

$L_p(S^{k-1})$_ით აღვნიშნოთ p ხარისხით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე S^{k-1}_ზე; $C(S^{k-1})$_უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე S^{k-1}_ზე. ამ სივრცეში ელემენტთა ნორმა განვსაზღვროთ ტოლობებით:

$$\|f\|_{L_p(S^{k-1})}=\left\{\int_{S^{k-1}}|f(Q)|^p\,dS^{k-1}(Q)\right\}^{1/p},\quad \|f\|_{C(S^{k-1})}=\max_{P\in S^{k-1}}|f(P)|.$$

[2]_დან გამომდინარე, შემოვიღოთ

განსაზღვრება 1.1.2. ვთქვათ $f\in L(S^{k-1})$. $P\in S^{k-1}$ წერტილს ეწოდება $f(P)$ ფუნქციის D წერტილი, თუ

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{k-1}}\int_{D^{k-1}(P,h)}\left[f(Q)-f(P)\right]dS^{k-1}(Q)=0.$$

შემოვიყვანოთ ჰიპერსფერზე განსაზღვრული ფუნქციისთვის უწყვეტობის მოდულის, სიგლუვის მოდულის, ინტეგრალური უწყვეტობის მოდულის და იტეგრალური სიგლუვის მოდულის ცნებები:

$f(P)\in C(S^{k-1})$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული განვსაზღვროთ ტოლობით:

.

$$\omega(f,\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\|f(P)-\frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|}\int_{C_h^{k-2}(P)}f(Q)dS(Q)\|_{C(S^{k-1})}=$$

$$=\sup_{0<h\le\delta}\max_{P\in S^{k-1}}\left|f(P)-\frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|}\int_{C_h^{k-2}(P)}f(Q)dS(Q)\right|.$$

$f(P)\in C(S^{k-1})$ ფუნქციის სიგლუვის მოდული განვსაზღვროთ

ტოლობით:

$$\omega^*(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q) \|_{C(S^{k-1})} . =$$

$$= \sup_{0<h\le\delta} \max_{P\in S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q) \right|.$$

$L_p(S^{k-1})$ $(1\le p\le\infty)$ სივრცეში უწყვეტობის იტეგრალური მოდული განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$\omega(f,\delta)_{L_p(S^k)} = \sup_{0<h\le\delta} \| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|} \int_{C^{k-2}(P,h)} f(Q)dS(Q) \|_{L_p(S^{k-1})} =$$

$$= \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|} \int_{C^{k-2}(P,h)} f(Q)dS(Q) \|_{L_p(S^k)} \right|^p dS(P) \right\}^{1/p},$$

ინტეგრალური სიგლუვის მოდული, კი ტოლობით:

$$\omega^*(f,\delta)_{L_p(S^{k-1})} = \sup_{0<h\le\delta} \| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q) \|_{L_p(S^{k-1})} =$$

$$= \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q) \right|^p dS(P) \right\}^{1/p}.$$

შესაბამისად განვსაზღვროთ განზოგადოებული უწყვეტობის სიგლუვის, უწყვეტობის ინტეგრალური და ინტეგრალური სიგლუვ-ის მოდულები:

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{c\ge0} \frac{\omega(f;c\delta)}{(1+c)^2}; \qquad \Omega^*(f;\delta) = \sup_{c\ge0} \frac{\omega^*(f;c\delta)}{(1+c)^2};$$

$$\Omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})} = \sup_{c\ge0} \frac{\omega(f;c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}; \quad \Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})} = \sup_{c\ge0} \frac{\omega^*(f;c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}. \qquad (1.1.6.)$$

ცნობილია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრულ უწყვეტობის და სიგლუვის მოდულებს აქვთ თვისებები:

1. $\Omega(f;\delta)$, $\Omega^*(f;\delta)$, $\Omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$, $\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$, $\omega(f,\delta)$, $\omega^*(f,\delta)$, $\omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$ და $\omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$ არ არის კლებადი.

2. $\Omega(f;\delta) \le 2\|f\|_{C(S^{k-1})}$, $\Omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})} \le 2\|f\|_{L_p(S^{k-1})}$, $\Omega^*(f;\delta) \le 2\|f\|_{c(s^{k-1})}$, $\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})} \le 2\|f\|_{L_p(S^{k-1})}$.

3. $\Omega(f_1+f_2;\delta) \le \Omega(f_1;\delta) + \Omega(f_2;\delta)$; $\Omega^*(f_1+f_2;\delta) \le \Omega^*(f_1;\delta) + \Omega^*(f_2;\delta)$; $\Omega(f_1+f_2;\delta)_{L_p(S^{k-1})} \le \Omega(f_1;\delta)_{L_p(S^{k-1})} + \Omega(f_2;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$;

$\Omega^*(f_1+f_2;\delta)_{L_p(S^{k-1})} \le \Omega^*(f_1;\delta)_{L_p(S^{k-1})} + \Omega^*(f_2;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$.

4. $\omega^*(f,\delta) \le W(f,\delta)$, $\omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})} \le c_p\omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$.

5. $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\mathrm{f},\delta) = 0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\mathrm{f},\delta)_{L_p(S^{k-1})} = 0$.

6. თუ $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\omega(\mathrm{f},\delta)}{\delta^2} = 0$, მაშინ f(P)=const.

7.თუ $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{\delta^2} = 0$, მაშინ f(P)=const თითქმის ყველგან S^{k-1}-ზე.

8. $\Omega(f;\lambda\delta) \le (1+\lambda)^2\,\Omega(f;\delta)$, $\Omega^*(f;\lambda\delta) \le (1+\lambda)^2\,\Omega^*(f;\delta)$,

$\Omega(f;\lambda\delta)_{L_p(S^{k-1})} \le (1+\lambda)^2\,\Omega_{L_p(S^{k-1})}(f;\delta)$, $\Omega^*(f;\lambda\delta)_{L_p(S^{k-1})} \le (1+\lambda)^2\,\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}$.

განსაზღვრება 1.1.3. თუ

$$\Omega(f;\delta) \le A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} \qquad (0<\alpha \le 2)$$

$$\left(\Omega^*(f;\delta) \le A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha}\right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოე-ბულ) პირობას C მეტრიკაში და ვწერთ: $\mathrm{f} \in \mathrm{Lip}\alpha$, $\left(\mathrm{f} \in \mathrm{Lip}^*\alpha\right)$.

განსაზღვრება 1.1.4. თუ

$$\Omega(f;\delta)_{L_p\left(S^{k-2}\right)} \le A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} \qquad (0<\alpha \le 2)$$

$$\left(\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-2})} \le A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^\alpha \right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოე-ბულ) პირობას L_p მეტრიკაში და ვწერთ $f \in \mathrm{Lip}(\alpha;p)$ $\left(f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha;p)\right)$.

§.1.2. ვალე_პუსენის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება

განსაზღვრება 1.2.1. ვთქვათ $f \in L(S^{k-1})$. ინტეგრალს

$$V_n(f,P) = \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)} \int_{S^{k-1}} \left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n f(Q)dS(Q). \tag{1.2.1}$$

ეწოდება ვალე_პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

ცნობილია, რომ ([2] გვ. 3)

$$\int_{S^{k-1}} \left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n dS(Q) = 2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}} \frac{\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma(n+k-1)}. \tag{1.2.2}$$

[17]_ში დამტკიცებულა შემდეგი ლემა:

ლემა A. ვთქვათ [0 ; π] სეგმენტზე მოცემულია ისეთი $f(t)$ ფუნქცია , რომ $f(t)\sin^{k-1}t \in L(0\,;\pi)$ (k>1ნატურალური რიცხვია) და

$$M = \sup_{0<h\le\pi}\left\{\frac{1}{h^k}\,|\int_0^h f(t)\sin^{k-1}t\,dt\,|\right\} < \infty\,.$$

ყოველი არაუარყოფითი არაზრდადი $g(t)\in L(0;\pi)$ ფუნქციისთვის

$$\int_0^t f(t)g(t)\sin^{k-1}t\,dt$$ ინტეგრალი

არსებობს და სამართლიანია უტოლობა

$$|\int_0^\pi g(t)f(t)\sin^{k-1}t\,dt\,| \le kM\int_o^\pi t^{k-1}g(t)dt\,.$$

ამ ლემის დახმარებით დავამტკიცოთ თეორემა S^{k-1}_ზე ვალე_ პუსენის ინტეგრალის თითქმის ყველგან კრებადობაზე.

თეორემა 1.2.1. თუ $f(P)\in L(S^{k-1})$, მაშინ ამ ფუნქციის ყველა D წერტილზე

$$\lim_{n\to\infty} V_n(f,P)=f(P).$$

დამტკიცება. (1.2.1) და (1.2.2)_დან გვაქვს

$$V_n(f,P)-f(P)=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{S^{k-1}}\left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n[f(Q)-f(P)]dS(Q).$$

ავიღოთ ε>0 და ვიპოვოთ δ>0 ისეთი, რომ 0<h≤δ_სთვის ადგი-ლი ჰქონდეს უტოლობას

$$\frac{1}{h^{k-1}}\int_0^h\left\{\int_{(P;\theta)=\cos\gamma}(f(Q)-f(P))dS(Q)\right\}d(\gamma)<\varepsilon.$$

განვიხილოთ გამოსახულება

$$V_n(f,P)-f(P)=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{w^{k-1}(P;\delta)}\left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n[f(Q)-f(P)]dS(Q)+$$

$$+\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{S^{k-1}\setminus w^{k-1}(P;\delta)}\left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n[f(Q)-f(P)]dS(Q)=I_1+I_2.$$

ლემა A_ს ძალით I_1_სათვის გვაქვს

$$I_1=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_0^\delta\int_{(P,\theta)=\cos\gamma}\left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n[f(Q)-f(P)]dS(Q)d\gamma=$$

$$=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_0^\delta\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\int_{(P,\theta)=\cos\gamma}[f(Q)-f(P)]dS(Q)d\gamma\le$$

$$\le\varepsilon k\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_0^\delta\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma d\gamma\le$$

$$\le\varepsilon k\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_0^\pi\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma d\gamma=$$

$$=\varepsilon k\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\frac{2^{k-3}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma(n+k-1)}\le c_k\varepsilon.$$

ახლა ზემოდან შევაფასოთ I_2.

$$I_2 = \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{\delta}^{\pi}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\int_{(P,\theta)=\cos\gamma}[f(Q)-f(P)]dS(Q)d\gamma \le$$

$$\le\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{\delta}^{\pi}\int_{(P,\theta)=\cos\gamma}[f(Q)-f(P)]dS(Q)d\gamma =$$

$$=\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{S^{k-1}}[f(Q)-f(P)]dS(Q) \le$$

$$\le c_k\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n} n^{\frac{k-1}{2}} = c_k q^{2n} n^{\frac{k-1}{2}},$$

სადაც

$$q=\cos\frac{\delta}{2}<1.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა შევისწავლოთ S^{k-1}_ზე განსაზღვრული ფუნქციის ვალე_ პუსენის ინტეგრალის მიახლოების საკითხი.

თეორემა 1.2.2. თუ $f(P)\in C(S^{k-1})$, მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C(S^{k-1})} \le C_k\Omega^*\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

დამტიკიცება. (1.2.1) და (1.2.2)_დან გვექნება

$$V_n(f,P)-f(P) = \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{S^{k-1}}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}[f(Q)-f(P)]dS(Q) =$$

$$= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{S^{k-1}}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\left\{\int_{S_\gamma^{k-1}(P)}[f(Q)-f(P)]dS(Q)\right\}d\gamma. \tag{1.2.3}$$

დავუშვათ

$$v=\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n},$$

$$du = \int_{S_\gamma^{k-1}(P)}[f(Q)-f(P)]dS^{k-1}(Q)d\gamma,$$

საიდანაც

$$dv = d\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} = \frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} dh,$$

$$u = \int_0^h d\gamma \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)]dS^{k-1}(Q) \int_{D^{k-1}(P;h)} [f(Q) - f(P)]dS(Q). \qquad (1.1.6)$$

ტოლობიდან ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^h \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \left\{ \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)]dS(Q) \right\} d\gamma =$$

$$= \left[\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} \int_{D^{k-1}(P;h)} [f(Q) - f(P)]dS(Q). \right]_0^\pi -$$

$$-\int_0^\pi \left\{ \int_{D^{k-1}(P,h)} [f(Q) - f(P)]dS(Q) \right\} \frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} dh =$$

$$= \int_0^\pi \left|D^k(P,h)\right| \left[f(P) \frac{1}{\left|D^k(P,h)\right|} \int_{D^k(P,h)} f(P)dS(Q) \right] \frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} dh..$$

$$\left\|V_n(f;P) - f(P)\right\|_{C(S^{k-1})} \le \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \int_0^\pi \left|D^{k-1}(P,h)\right| \left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right| \Omega^*(f;h)dh =$$

შემდეგ $= \dfrac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \displaystyle\int_0^\pi \left|D^{k-1}(P,h)\right| \left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right| \Omega^*\left(f; \sqrt{n}h\frac{1}{\sqrt{n}}\right)dh \le$

$$\le \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \Omega^*\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \int_0^\pi \left|D^k(P,h)\right| \left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right| \left(1+\sqrt{n}h\right)^2 dh.$$

(1.2.4) ზემოდან შევაფასოთ

ინტეგრალი

$$\int_0^\pi \left|D^{k-1}(P,h)\right| \left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right| \left(1+\sqrt{n}h\right)^2 dh.$$

წინა თეორემის დამტკიცებიდან გვაქვს

$$\left|D^{k-1}(P,h)\right| = \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^h \sin^{k-2}\gamma d\gamma \le \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} h^{k-1},$$ ამიტომ

$$\int_0^{\pi}\left|D^{k-1}(P,h)\right|\left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right|\left(1+\sqrt{n}h\right)^2 dh. \le$$

$$\le \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi} h^{k-1}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n-1}\sin\frac{h}{2}\left(1+2\sqrt{n}h+nh^2\right)dh =$$

$$= \frac{2^k\pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left(\frac{h}{2}\right)^{k-1}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n-1}\sin\frac{h}{2}\left(1+2\sqrt{n}h+nh^2\right)dh \le$$

$$\le \frac{2^k\pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\left[\frac{\pi^{k-1}}{2^k}\int_0^{h}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n-1}\left(\sin\frac{h}{2}\right)^{k} dh + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^{k-1}}{2^k}\sqrt{n}\int_0^{h}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n-1}\left(\sin\frac{h}{2}\right)^{k+1} dh + \frac{\pi^{k-1}}{2^k}n\int_0^{h}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n-1}\left(\sin\frac{h}{2}\right)^{k+2} dh\right] =$$

$$= \frac{2^k\pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\left[\frac{\pi^{k-1}}{2^k}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{k+1}{2}\right)}+\frac{\pi^{k-1}}{2^k}\sqrt{n}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{k+2}{2}\right)}+\frac{\pi^{k-1}}{2^k}n\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{k+3}{2}\right)}\right].$$

(1.2.5) (1.2.3) და (1.2.4)_დან გვაქვს :

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C(S^{k-1})} \le C_k\Omega^*\left(f;\frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f \in \mathrm{Lip}^*\alpha$, მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C(S^{k-1})} \le \frac{C_k A}{\sqrt{n^{\alpha}}}. \qquad (1.2.6)$$

თეორემა 1.2.3. თუ $f \in \mathrm{L}p\left(S^k\right)$, მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C(S^{k-1})} \le B_k\Omega^*\left(f;\frac{i}{\sqrt{n}}\right)_{Lp(S^{k-1})}.$$

დამტკიცება. (1.2.1) და (1.2.2)-დან გვაქვს

$$V_n(f,P)-f(P)=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{S^{k-1}}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}[f(Q)-f(P)]dS(Q)=$$

$$=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int_{S^{k-1}}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\left\{\int_{S_\gamma^{k-1}(P)}[f(Q)-f(P)]dS(Q)\right\}d\gamma. \tag{1.2.7}$$

დავუშვათ

$$v=\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n},$$

$$du=\int_{S_\gamma^{\ k-1}(P)}[f(Q)-f(P)]dS^{k-1}(Q)d\gamma,$$

საიდანაც

$$dv=\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}dh,$$

$$u=\int_{D^k(P,h)}[f(Q)-f(P)]dS^k(Q).$$

(1.2.7) ტოლობიდან ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^h\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\left\{\int_{S_\gamma^{\ k-1}(P)}[f(Q)-f(P)]dS(Q)\right\}d\gamma=$$

$$=\left[\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\int_{D^{k-1}(P;h)}[f(Q)-f(P)]dS(Q)\right]_0^\pi-$$

$$-\int_0^\pi\left\{\int_{D^{k-1}(P,h)}[f(Q)-f(P)]dS(Q)\right\}\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}dh=$$

$$=\int_0^\pi\left\{\int_{D^{k-1}(P,h)}[f(P)-f(Q)]dS(Q)\right\}\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}dh \tag{1.2.8}$$

$$=\int_0^\pi\left|D^{k-1}(P,h)\right|\left[f(P)\frac{1}{\left|D^{k-1}(P,h)\right|}\int_{D^{k-1}(P,h)}f(Q)dS(Q)\right]\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}dh.$$

(1.2.7) და (1.2.8)_დან გვაქვს

$$\left|V_n(f;P)-f(P)\right|^p \le \left(\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\right)^p \left[\int_0^{\pi}\left|D^{k-1}(P,h)\right|\left|f(P)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\left|D^{k-1}(P,h)\right|}\int_{D^k(P,h)} f(Q)dS(Q)\right|\left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right|dh\right]^p.$$

ცნობილი უტოლობის ძალით [25, გვ179] აქედან ვღებულობთ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{L_p(S^{k-1})} = \left\{\int_{S^{k-1}}\left|V_n(f;P)-f(P)\right|^p dS(P)\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\left[\int_{S^{k-1}}\left[\int_0^{\pi}\left|f(P)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{\left|D^k(P,h)\right|}\int_{D^{k-1}(P,h)} f(\theta)dS(\theta)\right|\left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right|\left|D^{k-1}(P,h)\right|dh\right]^p dS(P)\right]^{1/p} \le$$

$$\le \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left|D^{k-1}(P,h)\right|\left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right|\left[\left[\int_{S^{k-1}}\left|f(P)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{\left|D^{k-1}(P,h)\right|}\int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q)\right|^p dS(P)\right]^{1/p} dh \le$$

$$\le \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left|D^{k-1}(P,h)\right|\left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right|\left|\Omega^*(f;h)_{l_p(S^{k-1})}\right|dh =$$

$$= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left|D^{k-1}(P;h)\right|\left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right|\left|\Omega^*\left(f;\sqrt{n}h\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{L_p(S^{k-1})}\right|dh \le$$

$$\le \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\Omega^*\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{L_p(S^{k-1})}\int_0^{\pi}\left|D^{k-1}(P,h)\right|\left|\frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}\right|\left(1+\sqrt{n}h\right)^2 dh.$$

აქედან (1.2.5)_ს ძალით, გვაქვს

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C(S^{k-1})}\le B_k\Omega^*\left(f;\frac{i}{\sqrt{n}}\right)_{Lp(S^{k-1})}.$$ ამით

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f\in \mathrm{Lip}^*(\alpha;\mathrm{p})$, მაშინ

$$\left\|V_n(f;P)-f(P)\right\|_{C(S^{k-1})}\le \frac{B_kA}{\sqrt{n^\alpha}}. \qquad (1.2.9)$$

თეორემა 1.2.4. (1.2.6) და (1.2.9) შეფასებები (რიგის თვალ- საზრისით) საბოლოოა.

დამტკიცება. $f(\theta,\varphi)$ ფუნქცია S^2_ზე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$f(\theta,\varphi)=\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}.$$

ცხადია, რომ ის ეკუთვნის $\mathrm{Lip}^*\alpha$ და $\mathrm{Lip}^*(\alpha;\mathrm{p})$ კლასს. [15,გვ 259]-ის ანალოგიურად ვაჩვენოთ, რომ

$$V_n(f;0,0)>\frac{A}{\sqrt{n^\alpha}}.$$

მართლაც

$$V_n(f;0,0)=\frac{n+1}{4\pi}\int_{S^2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin\gamma d\gamma=$$

$$=\frac{n+1}{2}\int_{S^2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\alpha+1}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n+1}d\gamma=\frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+2+\frac{\alpha}{2}\right)}>\frac{A}{\sqrt{n^\alpha}}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 1.2.5. თუ $f(P)\in C(S^{k-1})$ ფუნქციისთვის რაღაც P წერტილზე არსებობს ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი $\overline{\Delta}f(P)$, მაშინ

$$V_n(f,P)=f(P)+\frac{\overline{\Delta}f(P)}{n}+\frac{\rho_n}{n}. \qquad (1.2.10)$$

სადაც $\rho_n\to 0$, როცა $n\to\infty$.

დამტკიცება. თეორემის პირობის ძალით

$$\frac{1}{\left|S_\gamma^{k-1}(P)\right|}\int_{S_\gamma^{k-1}(P)}f(Q)dS^{k-1}(Q)=f(P)+\frac{2\overline{\Delta}f(P)\sin^2\frac{\gamma}{2}}{k-1}+\bar{o}\left(sn^2\frac{\gamma}{2}\right).$$ ამიტომ

$$V_n(f,P)=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left(\cos\tfrac{\gamma}{2}\right)^{2n}\int_{S_\gamma^{k-1}(P)}f(Q)dS^{k-1}(Q)d\gamma=$$

$$=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left(\cos\tfrac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma\left\{\frac{1}{\left|S_\gamma^{k-1}(P)\right|}\int_{S_\gamma^{k-1}(P)}f(Q)dS^{k-1}\right\}d\gamma=$$

$$=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-2}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left(\cos\tfrac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma\left[f(P)+\frac{2\Delta f(P)\sin^2\frac{\gamma}{2}}{k-1}+\bar{o}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\right]d\gamma=$$

$$=f(P)+\bar{\Delta}f(P)\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-3}(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left(\cos\tfrac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma\sin^2\frac{\gamma}{2}d\gamma+$$

$$+\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-2}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\bar{o}\left(\int_0^{\pi}\left(\cos\tfrac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma\sin^2\frac{\gamma}{2}d\gamma\right).$$

(1.2.11)

შემდეგ

$$\bar{\Delta}f(P)\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-3}(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left(\cos\tfrac{\gamma}{2}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma\sin^2\frac{\gamma}{2}d\gamma=$$

$$=\bar{\Delta}f(P)\frac{4\Gamma(n+k-1)}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}(\cos\gamma)^{2n+k-2}\sin^k\gamma d\gamma=$$

$$=\bar{\Delta}f(P)\frac{4\Gamma(n+k-1)}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma(n+k)}=\frac{\bar{\Delta}f(P)}{n+k-1}=\frac{\bar{\Delta}f(P)}{n}-\frac{\bar{\Delta}f(P)}{n(n+k-1)}.$$

(1.2.12)

ანალოგიურად მიიღება, რომ

$$\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-2}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k-1}{2}\right)}\bar{\bar{o}}\left(\int_0^{\pi}\left(\cos\tfrac{\gamma}{1}\right)^{2n}\sin^{k-2}\gamma\sin^2\frac{\gamma}{2}d\gamma\right)=\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (1.2.13)$$

(1.2.11), (1.2.12) და (1.213)_დან ვღებულობთ (1.2.10)_ს.

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ ვალე_პუსენის ინტეგრალი მიუხედავად მისი ზოგადობისა (უწყვეტი ფუნქციის ვალე_პუსენის ინტეგრალი თანაბრად უახლოვდება ამ ფუნქციას), გვაძლევს $\frac{1}{n}$ რიგის მიახლოებას და უფრო მეტიც, f ფუნქციის სტრუქტურული თვისებების ნებისმიერი სახის გაუმჯობესება არ გვაძლევს უკეთესი რიგის მიახლოებას.

§1.3. ვალე_პუსენის გადიფერენცირებული ინტეგრალის კრებადობა

დავუშვათ

$$\Phi_n(\gamma) = \frac{n+1}{4\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^n .$$

[15] ნაშრომში დამტკიცებული არის ლემა .

ლ ე მ ა B. სამართლიანია ტოლობა

$$D_3\phi_n(\gamma)\,|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=0}} = \frac{n(n+1)}{2^{(n+1)}\pi}[(n-1)-(n+1)\cos\gamma](1+\cos\gamma)^{n-1} =$$
$$= n(n+1)(\phi_{n-1}(\gamma)-\phi_n(\gamma)).$$

ცხადია, რომ

$$D_3^2\phi_n(\gamma)\,|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=0}} = n(n+1)(D_3\phi_{n-1}(\gamma)-D_3\phi_n(\gamma)) =$$
$$= \frac{n^2(n+1)}{4\pi}\left((n-1)^2-2n^2\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)+(n+1)^2\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^2\right)\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^{n-2} =$$
$$= n^2(n+1)\{(n-1)\phi_{n-2}(\gamma)-2n\phi_{n-1}(\gamma)+(n+1)\phi_n(\gamma)\}$$

ლ ე მ ა 1.3.1. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1. $\int\limits_0^{\pi} D_3^2\phi_n(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma = 0;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{0<\delta\le\gamma\le\pi} |D_3^2\phi_n(\gamma)| = 0;$

3. $\int\limits_0^{\pi} D_3^2\phi_n(\gamma)\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma = \frac{1}{2\pi}\left[1-\frac{5n+6}{n^2+5n+6}\right];$

4. $\int\limits_0^{\pi} |D_3^2\phi_n(\gamma)|\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma = O(1).$

დამტკიცება. 1. და 2. ტოლობა ცხადია. ვაჩვენოთ 3. ტოლობის სამართლიანობა.

მართლაც

$$\int\limits_0^{\pi} D_3^2\phi_n(\gamma)\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma = n^2(n+1)\left\{(n-1)\int\limits_0^{\pi}\Phi_{n-2}(\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma -\right.$$

$$\left.-2n\int\limits_0^{\pi}\Phi_{n-1}(\gamma)\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma + (n+1)\int\limits_0^{\pi}\Phi_n(\gamma)\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma\right\} =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2\pi}\left[(n-1)^2\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^5\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n-3}d\gamma - 2n^2\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^5\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n-1}d\gamma +\right.$$

$$\left.+(n+1)^2\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^5\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n+1}d\gamma\right] =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2\pi}\left[\frac{(n-1^2)\Gamma(3)\Gamma(n-1)}{4\Gamma(n+2)} - 2n^2\frac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{4\Gamma(n+3)} + (n+1)^2\frac{\Gamma(3)\Gamma(n+1)}{4\Gamma(n+4)}\right] =$$

$$= \frac{n^2}{2\pi(n^2+5n+6)} = \frac{1}{2\pi}\left[1-\frac{5n+6}{n^2+5n+6}\right].$$

ე.ი.

$$\int\limits_0^{\pi} D_3^2\phi_n(\gamma)\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma = \frac{1}{2\pi}\left[1-\frac{5n+6}{n^2+5n+6}\right]$$

ახლა ვაჩვენოთ 4 ტოლობის სამართლიანობა. ამისათვის განვიხილოთ

$$g_n(\gamma)=(n-1)^2-2n^2\cos^2\frac{\gamma}{2}+(n+1)^2\cos^4\frac{\gamma}{2}$$

ფუნქცია [0,π] შუალედში . ამ Fფუნქციას [0,π] შუალედში აქვს შემ- დეგი კრიტიკული წერტილები $\gamma_1=0$, $\gamma_2=\pi$ და $\gamma_3=2\arccos\frac{n}{n+1}$, ხოლო ამ წერტილებზე მისი მნიშვნელობები იქნება

$g_n(0)=2$, $g_n(\pi)=(n-1)^2$ და $g_n(2\arccos\frac{n}{n+1})=-2+\frac{4n+3}{(n+1)^2}$.

ვინაიდან

$$(n-1)^2-2n^2\cos^2\frac{\gamma}{2}+(n+1)^2\cos^4\frac{\gamma}{2}=0$$

განტოლების ამონახსნებია

$$\gamma_1=2\arccos\sqrt{\frac{n^2-\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}},$$

$$\gamma_2=2\arccos\sqrt{\frac{n^2+\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}}.$$

ამიტომ $g_n(\gamma)$ დადებითია $E_{n1}=\left[0;2\arccos\sqrt{\frac{n^2-\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}}\right]$ და

$E_{n3}=\left[2\arccos\sqrt{\frac{n^2+\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}};\pi\right]$ შუალედში და უარყოფითია

$E_{n2}=\left[2\arccos\sqrt{\frac{n^2-\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}};2\arccos\sqrt{\frac{n^2+\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}}\right]$ შუალედში. გარდა ამისა,

$$|g_n(\gamma)|\le 2,\quad \forall\gamma\in E_{n1}\quad \text{და}\quad |g_n(\gamma)|\le\frac{2n^2-1}{(n+1)^2},\quad \forall\gamma\in E_{n2} \tag{1.3.1}$$

შესაბამისად, მე_4_ს დასამტკიცებლად საკმარისია განვიხი- ლოთ შემდეგი ინტეგრალი:

$$I_{n2}=-\frac{n^2(n+1)}{4\pi}\int_{E_2}\left[(n-1)^2-2n^2\cos^2\frac{\gamma}{2}+(n+1)^2\cos^4\frac{\gamma}{2}\right]$$

$$\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^{n-2}\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma.$$

$$I_{n2} \le \frac{n^2(n+1)}{4\pi}\frac{2n^2-1}{(n+1)^2}\int_{2\arccos\sqrt{\frac{n^2-\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}}}^{2\arccos\sqrt{\frac{n^2+\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}}}(1+\cos\gamma)^{n-2}\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma \le$$

$$\le \frac{n^2(n+1)}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^{n-2}\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma =$$ მაგრამ

$$= \frac{n^2(2n^2-1)}{8\pi}\frac{(n-2)!2!}{(n+1)!} = \frac{n(2n^2-1)}{4\pi(n^2-1)(n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2-1)}{4\pi(n^2-1)(n+1)} = \frac{1}{2\pi}. \qquad (1.3.2)$$

(1.2.2)_ის გამოყენებით, უტოლობიდან

$$0 < I_n < \frac{n(2n^2-1)}{4\pi(n^2-1)(n+1)}$$

გვაქვს

$$0 < \overline{Lim} I_n < \frac{1}{2\pi}$$ ე.ი.

$$I_n = O(1) \qquad (1.3.3)$$

აქედან (1.3.3) ტოლობის გამოყენებით გამოდის 4_ის სამართლიანობა .

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ $f\in L(S^2)$. თუ $x\in S^2$ წერტილზე არსებობს სასრული $\overline{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} D_3^2 V_n(f;x) = \overline{\Delta}^2 f(x).$$

დამტკიცება. თუ $x(\theta,\varphi)$_ს მივიღებთ კოორდინატთა სათავედ, მაშინ (1.3.3) და ლემა 1.3.1_ის ძალით გვაქვს

$$D_3^2 V_n(f;x)=\int_0^{\pi}\left[\int_{(x;y)=\cos\gamma} D_3^2\Phi_n(\gamma)\left[f(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]dS(y)\right]d\gamma=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} D^2\Phi_n(\gamma)\sin\gamma\frac{1}{2\pi\sin\gamma}\left[\int_{(x;y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]dS(y)\right]d\gamma=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} D_3^2\Phi_n(\gamma)\sin\gamma\frac{1}{4}\sin^4\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\frac{1}{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{(x;y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]dS(y)}{\frac{1}{4}\sin^4\frac{\gamma}{2}}\right]d\gamma=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} D_3^2\Phi_n(\gamma)\sin\gamma\frac{1}{4}\sin^4\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\frac{1}{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{(x;y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]dS(y)}{\frac{1}{4}\sin^4\frac{\gamma}{2}}-\right.$$

$$\left.-\overline{\Delta^2}f(x)\right]d\gamma+\overline{\Delta^2}f(x)-\frac{5n+6}{(n^2+5n+6)}\overline{\Delta^2}f(x).$$

ვთქვათ $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია. ავიღოთ ისეთი $\delta>0$, რომ

$$\left|\frac{\frac{1}{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{(x;y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]dS(y)}{\frac{1}{4}\sin^4\frac{\gamma}{2}}-\overline{\Delta^2}f(x)\right|<\varepsilon, \qquad (1.3.4)$$

როცა $0<\gamma<\delta$.

შემდეგ

$$\left|D_3^2 V_n(f;x)-\overline{\Delta^2} f(x)\right| \le$$

$$\le 2\pi\int_0^{\delta} D_3^2\Phi_n(\gamma)\sin\gamma\frac{1}{4}\sin^4\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\frac{1}{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{(x;y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]dS(y)}{\frac{1}{4}\sin^4\frac{\gamma}{2}}-\right.$$

$$\left.-\overline{\Delta^2} f(x)\right]d\gamma+2\pi\int_{\delta}^{\pi}\left|D_3^2\Phi_n(\gamma)\right|d\gamma\int\limits_{(x;y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x)-\overline{\Delta}f(x)\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]dS(y)+$$

$$+2\pi\left|\overline{\Delta^2} f(x)\right|\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\left|D_3^2\Phi_n(\gamma)\right|\sin\gamma\sin^4\gamma d\gamma+\left[\frac{5n+6}{4(n^2+5n+6)}\right]\left|\overline{\Delta^2} f(x)\right|=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4$$

ლემა 1.3.1_ის და (1.3.3)_ის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} I_1=\lim_{n\to\infty} I_2=\lim_{n\to\infty} I_3=\lim_{n\to\infty} I_4=0.$$ შესაბამისად ,

$$\lim_{n\to\infty} D_3^2 V_n(f;x)=\overline{\Delta^2} f(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.3.2. თუ $\overline{\Delta}^2 f(x)\in C(S^2)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} D_3^2\, V_n(f;x)=\overline{\Delta}^2 f(x)$$ თანაბრად x_ის მიმართ S^2-ზე.

ისევე, როგორც სამ გამზომილბიან სივრცეში, k გამზომილბიან სივრცეში სამართლიანია შემდეგი:

ლემა 1.3.2. მართებულია შემდეგი ტოლობები:

1. $\int_0^{\pi} D_k^2\Phi_n(\gamma)\sin^{k-2}\gamma d\gamma=0.$

2. $\lim_{n\to\infty}\max_{0<\delta\le\gamma\le\pi}\left|D_k^3\phi_n(\gamma)\right|=0.$

3. $\int_0^{\pi} D_k^2\Phi_n(\gamma)\sin^{k-2}\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma=o(1)$.

4. $\int_0^{\pi}\left|D_k^2\Phi_n(\gamma)\right|\sin^{k-2}\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}d\gamma=o(1)$.

ლემა 1.3.3. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1. $\int_0^{\pi}D_k^2\Phi_n(\gamma)\sin^{k-2}\gamma d\gamma=0$.

2. $\lim_{n\to\infty}\max_{0<\delta\le\gamma\le\pi}\frac{d}{d\cos\gamma}\left[D_k^2\phi_n(\gamma)\right]=0$.

3. $\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)}\int_0^{\pi}\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}\left|D^{k-1}(x;y)\right|\frac{d}{d\cos\gamma}\left[D_k^2\phi_n(\gamma)\right]d\gamma=o(1)$.

4. $\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)}\int_0^{\pi}\sin\gamma\sin^4\frac{\gamma}{2}\left|D^{k-1}(x;y)\right|\left|\frac{d}{d\cos\gamma}\left[D_k^2\phi_n(\gamma)\right]\right|d\gamma=o(1)$.

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ $f\in L(S^{k-1})$, თუ $x\in S^{k-1}$ წერტილზე არსებობს $\overline{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}D_k^2V_n(f;x)=\overline{\Delta}^2 f(x).$$

თეორემა 1.3.4. თუ $\overline{\Delta}^2 f(x)\in C(S^{k-1})$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}D_k^2V_n(f;x)=\overline{\Delta}^2 f(x)$$ თანაბრად

x_ის მიმართ S^2-ზე.

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ f $\in L(S^{k-1})$. თუ $x\in S^{k-1}$ წერტილზე არსებობს $\widetilde{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}D_k^2V_n(f;x)=\widetilde{\Delta}^2 f(x).$$

თეორემა 1.3.4. თუ $\widetilde{\Delta}^2 f(x)\in C\left(S^{k-1}\right)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}D_k^2V_n(f;x)=\widetilde{\Delta}^2 f(x)$$

თანაბრად x_ის მიმართ S^2 ზე.

II-თავი

განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა

§ 1. განსაზღვრებები და აღნიშვნები

დაუშვათ ერთეულოვან სფეროს ზედაპირზე მოცემულია ვექ-ტორ ფუნქცია v(θ,φ), რომლის კომპონენტებსაც სფერულ კოორდი-ნატთა სისტემაში აქვს სახე:

$v_\rho = v_x \sin\theta\cos\varphi + v_y \sin\theta\sin\varphi + v_z \cos\theta$

$v_\theta = v_x \cos\theta\cos\varphi + v_y \cos\theta\sin\varphi - v_z \sin\theta$

$v_\varphi = v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$

ლაპლასის განტოლების $\Delta U = 0$ ამონახსნებს აქვთ სახე (იხ.[2] ან [5], გვ. 200)

$$U_{lm} = \rho^l Y_{lm}(\vartheta;\varphi)$$

სადაც θ და φ სფერული კოორდინატებია, ხოლო Y_{lm} არის l რიგის სფერული ფუნქცია, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta), \qquad (-l \le m \le l),$$ სადაც

$P_l^m(\cos\theta)$ ლეჟანდრის მიკავშირებული ფუნქციაა.

$$P_l^m(\mu) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}} (1-\mu^2)^l.$$

ფუნქციები U_{lm} არიან l რიგის ერთგვაროვანი ჰარმონიული მრავალწევრები დეკარტის x_1, x_2, x_3 კოორდინატების მიმართ.

კოორდინატთა სისტემის ბრუნვის შედეგად ერთგვაროვანი მრავალწევრი გადადის იგივე ხარისხის ერთგვაროვან მრავალწევრ-ში. Mმეორეს მხრივ, ასეთი ბრუნვის დროს ლაპლასის ოპერატორი ინარჩუნებს სახეს, ე.ი. $\Delta_{x_1x_2x_3} = \Delta_{x_1'x_2'x_3'}$.

ამიტომ, ნებისმიერი ერთგვაროვანი ჰარმონიული მრავალწევრი ასეთი ბრუნვის შედეგად გადადის იგივე ხარისხის ერთგვაროვან ჰარმონიულ მრავალწევრ-ში. ამიტომ,

$$U_{lm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_n T_{mn}^l U_{\ln}(x_1', x_2', x_3').$$ ამრიგად

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sum_n T^l_{mn} Y_{\ln}(\theta',\varphi').$$

კოეფიციენტები T^l_{mn}, ცხადია დამოკიდებულია ეილერის კუთხეებზე, ე.ი. $T^l_{mn}=T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$, სადაც $0\le\varphi_1\le 2\pi,\ 0\le\theta<\pi,\ 0\le\varphi_2<2\pi$.

$T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ ფუნქციებს უწოდებენ განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციებს, ვინაიდან ზოგიერთ კერძო შემთხვევებში ისინი ემთხვევიან ჩვეულებრივ სფერულ ფუნქციებს ([5], გვ.214). განზოგადოებული სფერული ფუნქციები ფართოდ გამოიყენება კვანტურ მექანიკაში და ატომურ ფიზიკაში [1], [2], [3], [4].

ფუნქციებს $T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ აქვთ შემდეგი სახე [2]

$$T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=l^{-i(m\varphi_1+n\varphi_2)}P^l_{mn}(\cos\theta),$$ სადაც

$$P^l_{mn}(\mu)=\frac{(-1)^{i-m}i^{m-n}}{2^l(l-m)!}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!}}(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}[(1-\mu)^{l-m}(1+\mu)^{l+m}],$$

$$\mu=\cos\theta.$$

განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციებს და ჩვეულებრივ სფერულ ფუნქციებს შორის კავშირი მოიცემა ტოლობებით ([5], გვ.207).

$$T^l_{m0}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi_1),$$

$$T^l_{0n}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=(-1)^n\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi_2),$$

$$T^l_{00}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=P_l(\cos\theta),$$

სადაც Y_{lm} ჩვეულებრივი სფერული ფუნქციაა, ხოლო P_l ლეჟანდრის პოლინომია.

ცნობილია, რომ [2] განზოგადოებული სფერული ფუნქციები

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right)$$

ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციებია საკუთრივი მნიშვნელობებით -l(l+1)

განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა ერთობლიობა $\sqrt{2l+1}T_{mn}^{l}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ ადგენენ სრულ ორთონორმირებულ სისტემას $f(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ ფუნქციათა სივრცეში, სადაც სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია ტოლობით

$$(f_1,f_2)=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi_1,\theta,\varphi_2)\overline{f_2(\varphi_1,\theta,\varphi_2)}\sin\theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2 .$$

შრომებში [7], [8], [9] შესწავლილია განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივის წერტილოვანი, აბსოლიტური და თანაბარი კრებადობა. ამ მწკრივების (C,α) მეთოდით შეჯამებადობის საკითხები შესწავლილი იყო ნ. მაჭარა-შვილის მიერ [9], [10], [11], ხოლო აბელის მეთოდით შეჯამებადობა განხილული იყო ს. თოფურიას მიერ [22].

განვსაზღვროთ v(θ,φ) ფუნქციის კომპონენტების კომბინა-ციები [2]

$$v_0=v_r,\quad v_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi+iv_\theta),\quad v_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi-iv_\theta)$$ და

დავშალოთ ისინი განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ

$$v_m(\theta,\varphi)\sim\sum_{l=|m|}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}c_{mn}^{l}T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0)\qquad (m=0,\pm1),\qquad (2.1.1)$$ სადაც

$$T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0)=e^{-in(\frac{\pi}{2}-\varphi)}P_{mn}^{l}(\cos\theta)$$

განზოგადოებული სფერული ფუნქციებია,

$$P_{mn}^{l}(\mu)=\frac{(-1)^{n-m}i^{n-m}}{2^l(l-m)!}\sqrt{\frac{(l-m)!(l+n)!}{(l+m)!(l-n)!}}(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}[(1-\mu)^{l-m}(1+\mu)^{l+m}],$$

ხოლო

$$C_{mn}^{l}=\frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}v_m(\theta',\varphi')\overline{T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi',\theta',0)}\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

ფურიეს კოეფიციენტება.

ვთქვათ Δ ლაპლასის ოპერატორია , ხოლო D_3_ლაპლასის ოპერატორი S^2 სფეროზე ([18], გვ 14)

$$\Delta=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}D,$$

$$D_3=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\qquad (2.1.2.)$$

ცნობილია , რომ [1]

$$D_3 T^l_{mn}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0) = -l(l+1)T^l_{mn}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0),$$

ე.ი. თუ D $^r_3$ =D3(D $^r_3$), მაშინ

$$D^r_3 T^l_{mn}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0) = [-l(l+1)]^r T^l_{mn}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0).$$

განვიხილოთ (2.1.1) მწკრივის აბელის საშუალოები

$$u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = \sum_{l=|m|}^{\infty}\rho^l \sum_{n=-l}^{l} C^l_{mn} T^l_{mn}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_m(\theta',\varphi')Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi'.$$

სადაც

$$Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi') = \sum_{l=|m|}^{\infty}(2l+1)\rho^l \sum_{n=-l}^{l} T^l_{mn}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0)\overline{T^l_{mn}(\frac{\pi}{2}-\varphi',\theta',0)}. \quad (2.1.3)$$

განსაზღვრება 2.1.1. (2.1.1) მწრივებს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A მეთოდით შეჯამებადს (1, θ_0 ,φ_0) წერტილში, თუ

$$\lim_{\rho\to 1-} u(v_{m;}\rho,\theta_0,\varphi_0) = S$$

განსაზღვრება 2.1.2. (2.1.1) მწრივებს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A* მეთოდით შეჯამებადს (1, θ_0 ,φ_0) წერტილში, თუ

$$\lim_{(\rho,\theta,\varphi)\hat{\to}(,\theta_0,\varphi_0)} u(v_{m;}\rho,\theta,\varphi) = S\,,$$

სადაც $(\rho,\theta,\varphi)\hat{\to}(1,\theta_0,\varphi_0)$ სიმბოლო ნიშნავს , რომ (ρ,θ,φ) წერ- ტილი მიისწრაფის (1, θ_0, φ_0) წერტილისკენ სფეროს არამხები მიმართულებით .

$D^r_3 u(v_m;\rho,\theta,\varphi)$ იყოს (2.1.1) მწკრივზე D ^3_r ოპერატორის მოქმედებით მიღებული მწკრივის აბელის საშუალოები, ე.ი.

$$D^3_r u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_m(\theta',\varphi')[D^3_r Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

განვსაზღვროთ ვალე_პუსენის წარმოებულის ანალოგი სფერო-ზე მოცემული ფუნქციისათვის ([20] , გვ. 65_72).

განსაზღვრება 2.1.3. თუ არსებობს რიცხვები a_0, a_1, ...,a_r ისეთი , რომ x წერტილის რაიმე მიდამოში სრულდება ტოლობა

$$\frac{1}{|C(x;h)|}\int_{C(x;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{a_\nu}{(\nu!)^2 2^\nu}(1-\cosh)^\nu+o(1-\cosh)^r,\quad r=1,2,. \qquad (2.1.4)$$

მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში გააჩნია r რიგის ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta^r} f(x)$ სიმბოლოთი.

(2.1.3) ტოლობით განსაზღვრული ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი a_ν რიცხვებთან დაკავშირებულია ტოლობებით

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\Delta^0} f(x)=a_0,\\ \overline{\Delta}[\overline{\Delta}+1\cdot 2]\{\overline{\Delta}+2\cdot 3]\cdots[\overline{\Delta}+(\nu-1)\nu]f(x)+a_\nu,\\ \quad \nu=1,2,\dots,r\end{array}\right\} \qquad (2.1.5)$$ სადაც

$\overline{\Delta}^i\cdot\overline{\Delta}^\gamma=\overline{\Delta}^{i+\gamma}$, $\quad i,\gamma\geq 0,\ i+\gamma\leq r.$

განსაზღვრება 2.1.4. ვიტყვით, რომ $x\in S^2$ ჩერტილის მიდამოში ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქŸიას ამ ჩერტილში გააჩნია r რიგის ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$, თუ ადგილი აქვს ჩარმოდგენას

$$\frac{1}{|D(x;h)|}\int_{D(x;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{b_\nu}{\nu!(\nu+1)!2^\nu}(1-\cosh)^\nu+0(1-\cosh)^r,\quad \nu=1,2$$

$\tilde{\Delta}^r f(x)$ ოპერატორი დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით .

განსაზღვრება 2.1.5. ვთქვათ $f(b)$ ინტეგრებადია $b_0\in \partial^2$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $a_0(b)$, $a_1(b)$, ...,$a_{r-1}(b)$ და რიცხვი a_r ისეთი , რომ $\lim_{x\to x_0} a_\gamma(x)=a_\gamma$ და

$$\frac{1}{|C(x_0;h)|}\int_{C(x_0;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{a_\nu(x)}{(\nu!)^2 2^\nu}(1-\cosh)^\nu+\frac{a_\nu}{(r!)^2 2r}(1-\cosh)^r+\varepsilon(x,h)(1-\cosh)^r,$$

სადაც $\lim_{\substack{h\to 0\\ x\to x_0}}\varepsilon(x,h)=0,$ მაშინ ვიტყვით , რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილ ში გააჩნია ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი ძლიერი აზრით და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta^r_x} f(x_0)$ სიმბოლოთი. ცხადია , რომ თუ $x=x_0$ მაშინ $\overline{\Delta}^r_x f(x_0)=\overline{\Delta}^r f(x_0)$.

ოპერატორი $\overline{\Delta}^r_x f(x)$ დაკავშირებულია a_ν (ν=1, 2,..., r) რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.6. ვთქვათ $f(x)$ ინტეგრებადია $x_0\in S^2$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $b_\gamma(x)$, $\gamma=0,1,...,r-1$ და რიცხვი b_r ისეთი , რომ $\lim\limits_{x\to x_0} b_\gamma(x)=b_\gamma$ და

$$\frac{1}{|D(x_0;h)|}\int\limits_{D(x_0;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{b_\nu(x)}{\nu!(\nu+1)!2^\nu}(1-\cosh)^\nu+\frac{b_r}{r!(r+1)!2^r}(1-\cosh)^r+\varepsilon(x,h)(1-\cosh)^r$$

სადაც $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x\to x_0}}\varepsilon(x,h)=0,$ მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილ-ში გააჩნია ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშნავთ $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0)$ სიმბოლოთი.

ცხადია , რომ თუ $x=x_0$, მაშინ $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0)=\tilde{\Delta}^r f(x_0)$. ოპერატორი $\tilde{\Delta}^\nu f(x)$, $\nu=0,1,...,r$ დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (3.1.4) სახის ტოლობებით.

$(\rho,\theta,\varphi)\hat{\to}(1,\theta_0,\varphi_0)$ სიმბოლო ნიშნავს , რომ (ρ,θ,φ) წერტილი $(1, \theta_0, \varphi_0)$ წერტილისკენ მიისწრაფის სფეროს არა მხები მიმართულებით. ე.ი. არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი C, რომ $\dfrac{\rho_0}{1-\rho}<C$, სადაც ρ_0 არის (ρ,θ,φ) და $(1, \theta_0, \varphi_0)$ წერტილებს შორის მანძილი.

§ 2. განზოგადოებული სფერული ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივის შეჯამებადობა

თეორემა 2.2.1. $Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')$ ფუქცია ჰარმონიულია ანუ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')=0. \qquad (2.2.1)$$

დამტკიცება. (2.1.3)_ის ძალით გვაქვს

$$D_3Q(\rho;\theta,\varphi)=\sum_{\ell=|m|}^{\infty}[-e(e+1)](2e+1)\sum_{n=-e}^{e}T_{mn}^{e}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\vartheta,0\right)T_{mn}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi',\vartheta',0\right)$$

მეორე მხრივ

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\vartheta(\rho,\vartheta,\varphi)\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\sum_{\ell=|m|}^{\infty}\ell(2\ell+1)\rho^{\ell-1}\sum_{n=-e}^{e}T_{mn}^{e}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\vartheta,0\right)T_{mn}^{\ell}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi',\vartheta',0\right)==$$

$$=\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{\ell=|m|}^{\infty}\ell(2\ell+1)\rho^{\ell+1}\sum_{n=-e}^{e}T_{mn}^{e}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\vartheta,0\right)T_{mn}^{\ell}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi',\vartheta',0\right)=$$

$$\sum_{\ell=|m|}^{\infty}\ell(\ell+1)(2\ell+1)\rho^{\ell}\sum_{n=-e}^{e}T_{mn}^{e}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\vartheta,0\right)T_{mn}^{\ell}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi',\vartheta',0\right)$$ აქედან

(2.1.2.)_ის გათვალისწინებით ვღებულობთ (2.2.1).

განზოგადოებული სფერული ფუნქციების შეკრების ფორმულ-ის [2] და (2.1.3)_ის გამოყენებით

$$Q(\rho;\theta,\varphi)=(-1)^{m}e^{-\ell m(\varphi_1+\varphi_2)}\sum_{\ell=|m|}^{\infty}(2\ell+1)\mathrm{P}_{m,m}^{\ell}(\cos\gamma)\mathrm{P}^{\ell}$$

სადაც

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi),$$

$$tg\phi_1=\frac{\sin\beta\sin\theta'}{\cos\theta\sin\theta'\cos\beta+\cos\theta'\sin\theta},$$

$$tg\phi_2=\frac{\sin\beta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta'\cos\beta+\cos\theta'\sin\theta},\qquad \beta=\pi+\varphi'-\varphi.$$

როცა m=0, განზოგადოებული სფერული ფუნქციათა სისტემა ემთხვევა სფერულ ფუნქციათა სისტემას [2], ხოლო (2.1.1) მწკრივი ფურიე_ლაპლასის მწკრივს . ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ m=+1 შემთხვევას. ამ შემთხვევაში [13]-დან გვაქვს

$$P_{1,1}(\cos\gamma)=P_{\ell}(\cos\gamma)-\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}P_{\ell}(\cos t)\sin t dt,\qquad(2.2.2)$$

სადაც $P_{\ell}(\mu)$_ლეჟანდრის პოლინომია . (2.2.2)_დან ცხადია, რომ $P_{1,1}^{0}(\cos\gamma)=0$. ამიტომ $Q(\rho,\theta,\varphi)$ შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს

$$Q(\rho,\theta,\varphi)=(-1)^{m}e^{-\ell m(\varphi_1+\varphi_2)}\mathrm{P}*(\rho,\gamma),\qquad(2.2.3)$$ სადაც

$$\left.\begin{aligned}&P*(\rho,\gamma)=P(\rho,\gamma)-P_1(\rho,\gamma)\\&P(\rho,\gamma)=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)P_{\ell}(\cos\gamma)\rho^{\ell}=\frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos\gamma+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\right\},\qquad(2.2.4)$$

ხოლო

$$P_1(\rho,\gamma)=\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}P(\rho;t)\sin t dt.\qquad(2.2.5)$$ (2.2.1) და

(2.2.3)_ის ძალით ცხადია , რომ

$$
\begin{aligned}
D_3 Q(\rho,\theta,\varphi) &= -\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} Q(\rho,\theta,\varphi)\right] = \\
&= (-1)^m e^{-im(\varphi^1+\varphi^2)}\left[-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} P^*(\rho,\gamma)\right]\right)\right] = \\
&= (-1)^m e^{-im(\varphi^1+\varphi^2)}\left[D_3 P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_\gamma^\pi D_3 P(\rho;t)\sin t dt\right].
\end{aligned}
\tag{2.2.6}
$$

[10]_დან ცნობილია:

თეორემა A. თუ v(θ,φ) ფუნქცია უწყვეტია $(1,\theta_0,\varphi_0)$ წერტილ- ზე, მაშინ

$$\mathop{Lim}_{(\rho;\theta;\varphi)\to((1;\theta_0;\varphi_0)} u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = v_m(\theta_0,\varphi_0)$$

თეორემა B . თუ v(θ;φ) , მაშინ თითქმის ყველა $(1,\theta_0,\varphi_0)\in S^2$

წერტილისთვის

$$\mathop{Lim}_{(\rho;\theta;\varphi)\xrightarrow{\wedge}((1;\theta_0;\varphi_0)} u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = v_m(\theta_0,\varphi_0).$$

განვიხილოთ (2.1.1) მწკრივის გადიფერეცირებული აბელის საშუალო

$$D_3^r u(v_m;\rho,\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi v_m(\theta',\varphi')\left[D_r^3 Q(\rho;\theta,\varphi,\theta',\varphi')\right]\sin\theta' d\theta' d\varphi'.$$

(2.2.6)–ის ძალით

$$
\begin{aligned}
&D_3 Q(\rho,\theta,\varphi) = \\
&= (-1)^m e^{-im(\varphi^1+\varphi^2)}\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_\gamma^\pi D_3 P(\rho;t)\sin t dt\right].
\end{aligned}
$$

ლემა C. $P(\rho,\gamma)$_სთვის გვაქვს

$$D_3^r P(\rho;\gamma) = \frac{A_r(\rho;\gamma)}{\left[(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]^{\frac{3}{2}+2r}},$$

სადაც ყოველ $A_r(\rho;\gamma)$ წევრს $(1-\rho)$ და $\sin\frac{\gamma}{2}$_სთან მიმართებით აქვს 2r+1_ზე მეტი ან ტოლი ხარისხი და $A_r(\rho;\gamma)$ იყოფა $(1-\rho^2)$_ზე.

ლემა D. თუ $\overline{\Delta}^r v_m(\theta;\varphi) = 0$ პირობიდან გამოდის , რომ

$\mathop{Lim}_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = 0$, მაშინ $\overline{\Delta}^r v_m(\theta;\varphi) = S$ პირობიდან

გამომდინარეობს

$$\mathop{Lim}_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = S .$$

ლემა E. ნებისმიერი $r\in N$_სთვის სამრთლიანია ტოლობა

$$1.\ \lim_{\rho\to 1}\max_{0<\delta\le\gamma\le\pi}\left|D_3^r P(\rho;\gamma)\right| = 0,$$

$$2.\ \int_0^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;\gamma)\right|\gamma^{2r+1}d\gamma = o(1).$$

ლემა 2.2.1. ნებისმიერი $r\in N$_სთვის გვაქვს:

$$1.\ \lim_{\rho\to 1}\max_{0<\delta\le\gamma\le\pi}\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|\sin t dt = 0,$$

$$2.\ \int_0^{\pi}\left|\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|\sin t dt\right|\gamma^{2r+10}d\gamma = o(1).$$

დამტკიცება. 1. ტოლობა ცხადია. ვაჩვენოთ 2. . გვაქვს

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|\sin t dt\right|\gamma^{2r+1}d\gamma \le \int_0^{\pi}\frac{\gamma^{2r+1}}{1+\cos\gamma}\left|\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|\sin t dt\right|d\gamma =$$

$$= \int_0^{\pi}\left\{\int_0^{t}\frac{\gamma^{2r+1}}{1+\cos\gamma}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|\sin t d\gamma\right\}dt = \int_0^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|\sin t\left\{\int_0^{t}\frac{\gamma^{2r+1}}{1+\cos\gamma}\right\}dt \le$$

$$\le \int_0^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|\sin t\cdot t^{2r+1}tg\frac{t}{2}dt \le \int_0^{\pi}\left|D_3^r P(\rho;t)\right|t^{2r+1}dt = o(1).$$

თეორემა 2.2.2. ვთქვათ $v(\theta;\varphi)\in L(S^2)$, თუ რაიმე არაუარყო- ფითი r_სთვის არსებობს $\overline{\Delta}^r v_m(\theta_0;\varphi_0) = 0$, მაშინ

$$\lim_{\rho\to 1-}D_3^r u(v_m;\rho,\theta_0,\varphi_0) = \overline{\Delta}^r v_m(\theta_0,\varphi_0)$$

დამტკიცება. ზოგადობის დაურღვევად დავუშვათ , რომ S^2 სფეროს ჩრდილოეთ პოლუსია (θ_0,φ_0) . თუ $\overline{\Delta}^i v_m(\theta,\varphi) = 0$, i=0,1,2,… r, მაშინ ლემა D. _ს ძალით უნდა ვაჩვენოთ , რომ

$$\lim_{\rho\to 1-}D_3^r u(v_m;\rho,\theta_0,\varphi_0) = 0. \qquad (2.2.8)$$ გვაქვს

$$D_3^r u(v_m;\rho,\theta_0,\varphi_0) = (-1)^m \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma;\overline{\varphi}) e^{-im(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)} d\varphi\right]$$

$$\int_0^{\pi} \left[D_3^r P(\rho;\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi} \left|D_3^r P(\rho;t)\right| \sin t dt\right] \sin\gamma d\gamma. \tag{2.2.9}$$

ლემა D_ს ძალით შეიძლება ვიგულისხმოთ , რომ $\overline{\Delta}^i v_m(\theta\ ,\varphi\ ) = 0$, i=0,1,2,… r.

ვთქვათ ε>0 , შევარჩიოთ δ>0 ისეთი , რომ

$$\left|\int_0^{2\pi} v_m(\gamma,\overline{\varphi})\right| = 0,$$ როცა γ<δ. აქედან ცხადია , რომ

$$\left|\int_0^{2\pi} v_m(\gamma,\overline{\varphi}) e^{-im(\overline{\varphi}_1+\overline{\varphi}_2)} d\overline{\varphi}\right| < c\varepsilon\gamma^{2r},$$ როცა γ<δ. მაშინ (2.2.9)_დან

გვაქვს

$$\begin{aligned} D_3^r u(v_m;\rho,\theta_0,\varphi_0) &= (-1)^m \frac{1}{4\pi}\int_0^{\delta} \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma;\overline{\varphi}) e^{-im(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)} d\overline{\varphi}\right] \\ &\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi} \left|D_3^r P(\rho,t)\right| \sin t dt\right] \sin\gamma d\gamma + \\ &+ (-1)^m \frac{1}{4\pi}\int_{\delta}^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma,\overline{\varphi}) e^{-im(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)} d\overline{\varphi}\right] \cdot \\ &\cdot \left[D_3^r P(\rho;\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi} \left|D_3^r P(\rho,t)\right| \sin t dt\right] \sin\gamma d\gamma = I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

(2.2.9)_ის , ლემა E და ლემა 2.2.1_ის ძალით ვღებულობთ :

$$|I_1| < C\varepsilon\left\{\int_0^{\pi} \left|D_3^r P(\rho,t)\right| \gamma^{2r+1} d\gamma + \int_0^{\pi} \left|\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi} D_3^r P(\rho,t) \sin t dt\right| \gamma^{2r+1} d\gamma\right\} C\varepsilon. \tag{2.2.11}$$

ლემა E._ს მეორე ტოლობის და ლემა 3.2.1_ის ძალით ვღებულობთ თეორემა 2.2.1_ის სამართლიანობას.

ლემა 2.2.2. ნებისმიერი $r \in N$ და $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$_სთვის გვაქვს

$$\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi} \left|D_3^r P(\rho,t)\right| \sin t dt\right] \sin\gamma d\gamma = o(1). \tag{2.2.12}$$

დამტკიცება. ცნობილია, რომ ([12] , ლემა 3.4.5.)

$$\int_0^\eta \left|\frac{\partial D_3^r P(\rho,\gamma)}{\partial\gamma}\right| \sin^{2r+2}\gamma d\gamma = (1).$$

მეორეს მხრივ

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_\gamma^\pi D_3^r P(\rho,t)\sin t dt\right) = \frac{\sin\gamma}{(1+\cos\gamma)^2}\int_\gamma^\pi D_3^r P(\rho,t)\sin t dt -$$

$$-\frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma} D_3^r P(\rho,t),$$

ამიტომ

$$\int_0^\eta \left|\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_\gamma^\pi D_3^r P(\rho,t)\sin t dt\right| \sin^{2r+2}\gamma d\gamma \le$$

$$\le \left|\int_0^\eta \frac{\sin^{2r+3}\gamma}{(1+\cos\gamma)^2}\left\{\int_\gamma^\pi D_3^r P(\rho,t)\sin t dt\right\} d\gamma\right| +$$

$$+\int_0^\eta \frac{\sin^{2r+3}\gamma}{(1+\cos\gamma)^2}\left|D_3^r P(\rho,t)\right| d\gamma =$$

$$= \int_0^\eta D_3^r P(\rho,t)\sin t\left\{\int_0^t \frac{\sin^{2r+3}\gamma}{(1+\cos\gamma)^2} d\gamma\right\} dt +$$

$$+\int_\eta^\pi D_3^r P(\rho,t)\sin t\left\{\int_0^\eta \frac{\sin^{2r+3}\gamma}{(1+\cos\gamma)^2} d\gamma\right\} dt +$$

$$+\int_0^\eta \frac{\sin^{2r+3}\gamma}{(1+\cos\gamma)^2}\left|D_3^r P(\rho,t)\right| d\gamma \le$$

$$\le C\left(\int_0^\eta \left|D_3^r P(\rho,t)\right| \sin^{2r+1} t dt + \int_0^\eta \left|D_3^r P(\rho,t)\right| \sin t dt\right).$$

აქედან ლემა E._ს ძალით ვღებულობთ (2.2.12.)_ის სამართლი- ანობას.

ლემა 2.2.3. თუ $\overline{\Delta}^\nu v_m(\theta\ ,\varphi\ ) = 0$, υ=1,2,...,r პირობიდან გამომდინა- რეობს

$$\lim_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta_0,\varphi_0) = 0, \qquad \text{მაშინ } \overline{\Delta}^r v_m(\theta\ ,\varphi\ ) = s$$

პირობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta_0,\varphi_0) = s.$$

ეს ლემა მტკიცდება ლემა D_ს ანალოგიურად.

თეორემა 2.2.3. ვთქვათ $v(\theta,\varphi)\in L(S^2)$. თუ $r\in N$_სთვის არსე- ბობს

$\tilde{\Delta}^{r} v_\nu(\theta,\varphi)$, მაშინ

$$\lim_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi)=\tilde{\Delta}^{r} v_\nu(\theta,\varphi).$$

დამტკიცება. დავუშვათ , რომ (θ,φ) წერტილი S^2 სფეროს ჩრდილოეთ

პოლუსია . თუ $\tilde{\Delta}^{r} v_\nu(\theta,\varphi)=0,\ \nu=1,2,...,r,$ მაშინ ლემა 3.2.3_ ის ძალით შეგვიძლია

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi)=0.$$

რადგანაც $\tilde{\Delta}^{r} v_\nu(\theta,\varphi)=0,\ \nu=1,2,...,r,$ მაშინ ნებისმიერი ε>0_სთვის არსებობს

δ>0 ისეთი , რომ

$$\int_0^{\gamma}\left\{\int_0^{2\pi} v_m(\bar\gamma;\bar\varphi)d\bar\varphi\right\}\sin\bar\gamma d\bar\gamma < C\varepsilon\sin^{2r+2}\frac{\gamma}{2},\qquad \text{როცა } \gamma<\delta.$$

ადვილი საჩვენებელია , რომ

$$\int_0^{\gamma}\left\{\int_0^{2\pi} v_m(\bar\gamma;\bar\varphi)e^{-im(\bar\varphi_1+\bar\varphi_2)}d\bar\varphi\right\}\sin\bar\gamma d\bar\gamma < C\varepsilon\sin^{2r+2}\frac{\gamma}{2},\ \text{როცა } \gamma<\delta.$$

დავუშვათ , რომ $\eta=\min\left(\delta;\frac{\pi}{2}\right)$ გვაქვს

$$D_3^r u(v_m;\rho,\theta_0,\varphi_0)=(-1)^m\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma,\bar\varphi)e^{-im(\ddot\varphi_1+\ddot\varphi_2)}d\bar\varphi\right]$$
$$\left[D_3^r P(\rho,\gamma)-\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_\gamma^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right]\sin\gamma d\gamma = I_1+I_2$$

სადაც

$$I_1=(-1)^m\frac{1}{4\pi}\int_0^{\eta}\left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma;\bar\varphi)e^{-im(\ddot\varphi_1+\ddot\varphi_2)}d\bar\varphi\right]$$
$$\left[D_3^r P(\rho,\gamma)-\frac{1}{1+\cos\gamma}\int_\gamma^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right]\sin\gamma d\gamma,$$

$$I_1 = (-1)^m \frac{1}{4\pi}\int_{\eta}^{\pi}\left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma;\overline{\varphi})e^{-im(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)}d\overline{\varphi}\right]$$

$$\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right]\sin\gamma d\gamma$$

ლემა C_ს ძალით ცხადია, რომ

$$\underset{\rho\to 1-}{Lim}\ I_2 = 0 .$$

I_1_ში ნაწილობითი ინტეგრებით , ვღებულობთ

$$I_1 = \frac{(-1)^m}{4\pi}\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right]$$

$$\int_0^{\eta}\int_0^{2\pi} v_m(\gamma,\overline{\varphi})e^{-im(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)}\sin\gamma d\overline{\varphi}d\gamma -$$

$$,-\frac{(-1)^m}{4\pi}\int_0^{\eta}\left\{\int_0^{\gamma}\int_0^{2\pi} v_m(\gamma;\overline{\varphi})e^{-im(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)}\sin\gamma d\overline{\varphi}d\overline{\gamma}\right\}$$

$$\frac{d}{d\gamma}\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right]d\gamma.$$

(2.2.7)_ის ძალით ცხადია , რომ

$$\underset{\rho\to 1-}{Lim}\left[D_3^r P(\rho;\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right] = 0 .$$

(2.2.13.) და ლემა 2.2.2. _ის დახმარებით მივიღებთ

$$\frac{(-1)^m}{4\pi}\int_0^{\eta}\left\{\int_0^{\gamma}\int_0^{2\pi} v_m(\gamma,\overline{\varphi})e^{-im(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)}\sin\gamma d\overline{\varphi}d\overline{\gamma}\right\}$$

$$\frac{d}{d\gamma}\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right]d\gamma <$$

$$< C\varepsilon\int_0^{\eta}\frac{d}{d\gamma}\left[D_3^r P(\rho,\gamma) - \frac{1}{1+\cos\gamma}\int_{\gamma}^{\pi}\left|D_3^r P(\rho,t)\right|\sin t dt\right]\sin^{2r+2}\frac{\gamma}{2}d\gamma < C\varepsilon.$$

თეორემა 2.2.3. დამტკიცებულია.

[23]_ში დამტკიცებულია შემდეგი:

ლემა F. თუ მოცემულია $a_i(x)$ i=0,1,…,r ფუნქცია , მაშინ არსებობს ფუნქცია

$$T(x;t) = \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu(x)P_\nu(\cos\gamma),$$ ისეთი, რომ

$$T(x;x) = a_0(x) \quad , \qquad D_1^{\nu} T(x;x) = a_{\nu}(x) \qquad \nu = 1,2,...,r,$$ სადაც $\cos\gamma = (x;t)$.

ამ ლემის დახმარებით, ისევე როგორც თეორემა 2.2.2 და თეო- რემა 2.2.3 შეიძლება დამტკიცდეს.

თეორემა 2.2.4 ვთქვათ $v(\theta,\varphi) \in L(S^2)$ და $r \in N$. თუ (θ_0,φ_0) წერტილზე არსებობს $\overset{\sim r}{\Delta}_{(\theta;\varphi)} v_m(\theta_0,\varphi_0)$, მაშინ

$$\lim_{(\rho;\theta;\varphi)\to(1;\theta_0;\varphi_0)} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = \overset{\sim r}{\Delta}_{(\theta;\varphi)} v_m(\theta_0,\varphi_0)$$

თეორემა 2.2.5 ვთქვათ $v(\theta,\varphi) \in L(S^2)$ და $r \in N$. თუ (θ_0,φ_0) წერტილზე არსებობს $\overset{\sim r}{\Delta}_{(\theta;\varphi)} v_m(\theta_0,\varphi_0)$, მაშინ

$$\lim_{(\rho;\theta;\varphi)\to(1;\theta_0;\varphi_0)} D^r u(v_m;\rho;\theta;\varphi) = \overset{\sim r}{\Delta}_{(\theta;\varphi)} v_m(\theta_0;\varphi_0)$$

ლიტერატურა

1. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория, ч. 1., М.: Наука, 1968 .

2. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я., П редставление группы вращений трех мерного пронстранства и их применения УМН, 7:1, 1952, с. 3-117.

3. Давидов А.С., Квантовая механика. М.: Наука, 1973.

4. Давидов А.С., Теория атомного ядра. М.: Физматгиз, 1958.

5. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.

6. Кушниренко Г. Г., О приближений функций, заданных на единичной сфере, конечными сферическими суммами. Научн. докл. высшей школы, физ. мат. наук, 4(1958), Харьков, с. 47-53.

7. Литвинков С.С., О сходимости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Изв. Высш. учебн. заведений. Математика, 4, Москва, 1962, с. 92-103.

8. Литвинков С.С., О дифференцируемости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – ДАН, СССР 144:5, 1962, с. 977-980.

9. Литвинков С.С., Некоторые свойства рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Сиб. мат. журн., 9:2, 1968, с. 332-339.

10. Мачарашвили Н.Д., О линейных методах суммирования рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – собщ. АН Груз. ССР, 1980, 98:3 с. 549-552.

11. Мачарашвили Н.Д., О (C,α) ($\frac{1}{2}$<α<1) суммируемости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Тр. Груз. политехн. ин-та, 5(237), 1981, с. 43-48.

12. Мачарашвили Н.Д., О константах Лебега рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Тр. Груз. политехн. ин-та, 5(237), 1981, с. 49-56.

13. Мачарашвили Н. Д., Почхуа И. И., **Ц**иклаури З. И., Сходимость продифференцированного интеграла Вале-Пуссена – Тр. Груз. политехн. ин-та, 4(454). 2004, с. 9-15.

14. Macharashvili N., Pochkhua I., Summability of Differentiated Fourier, Series over the Generalized System of Spherical Functions by Abel's Method. Bull. Georg. Acad. Sci, 173(1), 2006, pp. 38-42.

15. Натансон И. П., Конструктивная теория функций. М. Изд. технико-теоретической литературы, 1949.

16. Топурия С. Б., Некоторые свойства интеграла Валле-Пуссена на сфере, Труды ГТУ, 3(260), Тб., 1983.

17. Топурия С. Б., Граничные свойства продифференцированного интеграла Пуассона для различных областей и их некоторые применения. Технический Университет, Тб., 2003.

18. Топурия С.Б., О представлении функций, определенных на поверхности единичной сферы, сингулярными интегралами и суммируемость рядов Лапласа. Труды ГПИ, 7(147), Тб., 1971, с. 25-58.

19. Топурия С. Б., Ряды Фурье-Лапласа на сфере. Тб., 1987.

20. Топурия С. Б., Суммирование методом Абеля продифференцированного ряда Фурье. Докл. АН СССР, 209, № 3, 1973, с. 569-572.

21. Топурия С. Б., Чикобава Н. Г., Суммирование линейными методами рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям Тр. Груз. ГТУ, №2, (407), 1995.

22. Pochkhua I., Matcharashvili N., On Vallee-Poussin Integral on the S^{k-1} Bull. Georg. Acad. Sci, 172(3), 2005, pp. 376-378.

23. Pochkhua I., On the Second-Order Differential of the Vallee-Poussin Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad. Sci, 174(1), 2006, pp. 33-35.

24. Pochkua I., On Vallee-Poussin Differentiated Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad. 174 (2), 2006.

25. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полия Г. Неравества. М. ИЛ., 1948.